

Mathématiques

Bases élémentaires - Les vecteurs

Définition :

Un vecteur est une portion de droite orientée. Il possède une origine et une extrémité, ainsi qu'une longueur, une direction et un sens.

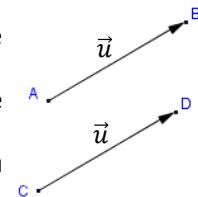
Dans l'illustration ci-contre, les vecteurs AB et CD ont la même direction, le même sens et la même longueur. Ils sont égaux.

On note un vecteur en écrivant les points d'origine et d'extrémité, (ou une minuscule) surmontés d'une flèche : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \vec{u}$

Le sens d'un vecteur est important : $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$

La valeur (la longueur) d'un vecteur est appelé la « norme » et est notée $\|\overrightarrow{AB}\|$.

Exemple : une vitesse est un vecteur. Elle possède une valeur, une direction et un sens.



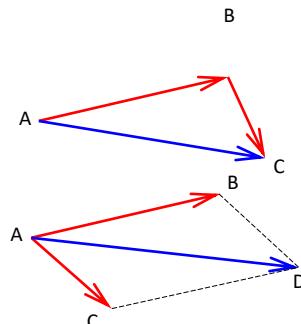
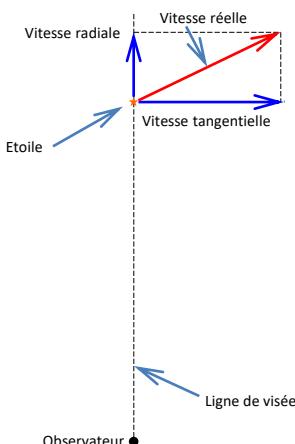
Somme de vecteurs :

Pour additionner deux vecteurs, il faut que l'extrémité du premier soit confondu avec l'origine du second.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Si les deux vecteurs à additionner ont la même origine, il suffit de construire le parallélogramme $ABDC$:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$$



Exemple : la vitesse réelle d'une étoile a deux composantes mesurables. La vitesse dans la ligne de visée (la vitesse radiale), et la vitesse tangentielle, projetée sur la sphère céleste, perpendiculaire à la première.

Pour trouver la valeur, le sens et la direction de la vitesse réelle de l'étoile, il suffit d'additionner les deux vecteurs mesurés.

La vitesse radiale est déduite de l'effet Doppler-Fizeau.

La vitesse tangentielle mesure la variation de la position sur la voûte céleste de l'étoile avec le temps.

Pour aller un peu plus loin...

Multiplication d'un vecteur par un nombre :

Pour multiplier un vecteur par un nombre, on multiplie la norme du vecteur par ce nombre, sa direction restant inchangée. Si le nombre est positif, le sens est le même, si le nombre est négatif, le sens est inversé.



Produit scalaire :

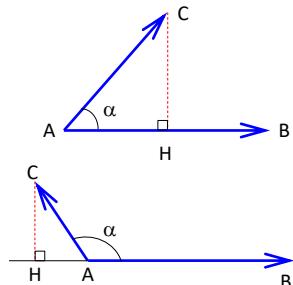
Un produit scalaire est la multiplication de deux vecteurs. Le résultat n'est pas un vecteur, mais un nombre réel (dans le monde des vecteurs, un nombre réel est appelé *scalaire*). Le produit se note avec un point (.), et non par le signe multiplier (x).

Calcul :

H est la projection de C sur AB.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\|$$

Si l'angle en A est obtus, $\|\overrightarrow{AH}\|$ est négatif, et le produit aussi.



Une autre formulation du produit scalaire tient compte de l'angle en A et s'écrit :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos \alpha$$

Si les vecteurs sont perpendiculaires (orthogonaux), leur produit scalaire est nul, car $\|\overrightarrow{AH}\|$ et $\cos \alpha$ sont tous deux nuls.

Le produit scalaire permet entre autres de faire des calculs dans les triangles quelconques, en donnant les relations entre les angles et les longueurs des côtés. Jean-Baptiste Delambre (1749-1822) et Pierre Méchain (1744-1804) utilisèrent le calcul vectoriel pour déterminer le méridien terrestre (longueur de l'arc joignant les pôles terrestres et ayant la même longitude, celle de Paris), et donner ainsi la première définition universelle du mètre, qui devint le dix millionième de la moitié de ce méridien terrestre. La définition du mètre a aujourd'hui changé.