PRINCIPE DE FERMAT
INDICE DE REFRACTION

Le principe de Fermat est un principe physique qui décrit la propagation des rayons lumineux.

Un peu d'histoire

Pierre de Fermat (1601/1608-1665) est un juriste (avocat à Bordeaux) passionné de mathématiques et de sciences physiques.
Il s'oppose notamment à Descartes par son refus de démontrer ce qu'il affirme, en particulier ce fameux principe sur la propagation des rayons lumineux.

Il finit par travailler sur cette démonstration que Descartes accepte.

Alors que Descartes explique les lois de l'optique en comparant la lumière à une balle soumise à des forces, Fermat se base sur le fait que la nature agit toujours par les voies les plus courtes et les plus simples.

Fermat a aussi travaillé sur la détermination des tangentes à une courbe, la théorie des nombres, la géométrie analytique et les probabilités. Il est considéré comme un précurseur du calcul différentiel. Il édicte plusieurs théorèmes (petit théorème de Fermat, théorème des deux carrés, théorème sur les nombres polygonaux, dernier théorème de Fermat), qu'il ne faut pas confondre avec le Principe de Fermat qui nous intéresse ici.

Enoncé du principe

Le principe de Fermat peut s'exprimer ainsi :

La lumière se propage d'un point à un autre sur des trajectoires
telles que la durée du parcours est minimale[1].

C'est un fondement de l'optique géométrique. Le principe ne se préoccupe aucunement de la nature de la lumière qu'il étudie, ni de la qualité de sa source.
Il néglige également les phénomènes de diffraction sur son trajet, et ne considère que les obstacles rencontrés lors de sa propagation comme les surfaces limitant deux milieux transparents différents.

Ces surfaces, où une transmission ou une réflexion de la lumière se produit, sont appelées des « dioptres ». Ce mot dioptre vient du grec et signifie « voir à travers ».

On part également du principe que la surface considérée (le dioptre) est suffisamment régulière pour qu'une tangente en tous ses points soit calculable, autrement dit et en particulier, qu'il n'y a pas de rupture de continuité sur la surface.

[1] *Dans la version complète, le terme « minimale » est remplacé par « extrêmale ».*

Conséquences du principe de Fermat

Propagation rectiligne de la lumière

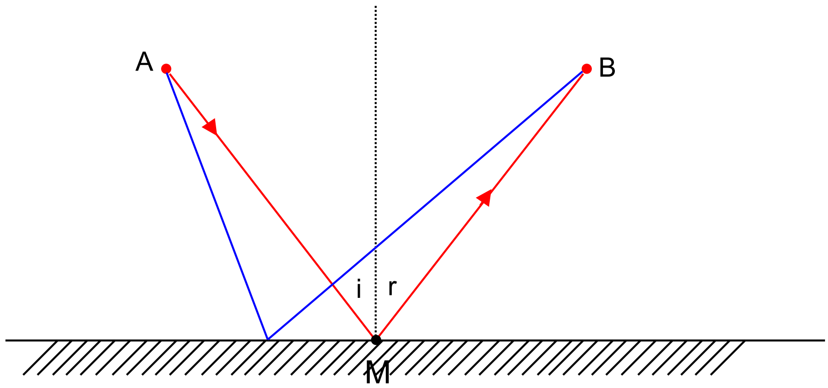
Le chemin le plus court pour aller d'un point A à un point B est la ligne droite. Comme dans un milieu homogène, la vitesse de la lumière est constante, le temps minimal pour aller de A à B est obtenu en suivant cette ligne droite.

Retour inverse de la lumière

Le trajet de la lumière ne dépend pas de son sens de parcours. Le chemin le plus court pour aller de B vers A est aussi la même ligne droite que précédemment. Le temps de parcours dans ce sens est aussi minimal (c'est le même).
L'étude d'un système optique pourra tout aussi bien se faire en partant de l'entrée comme de la sortie.

Réflexion

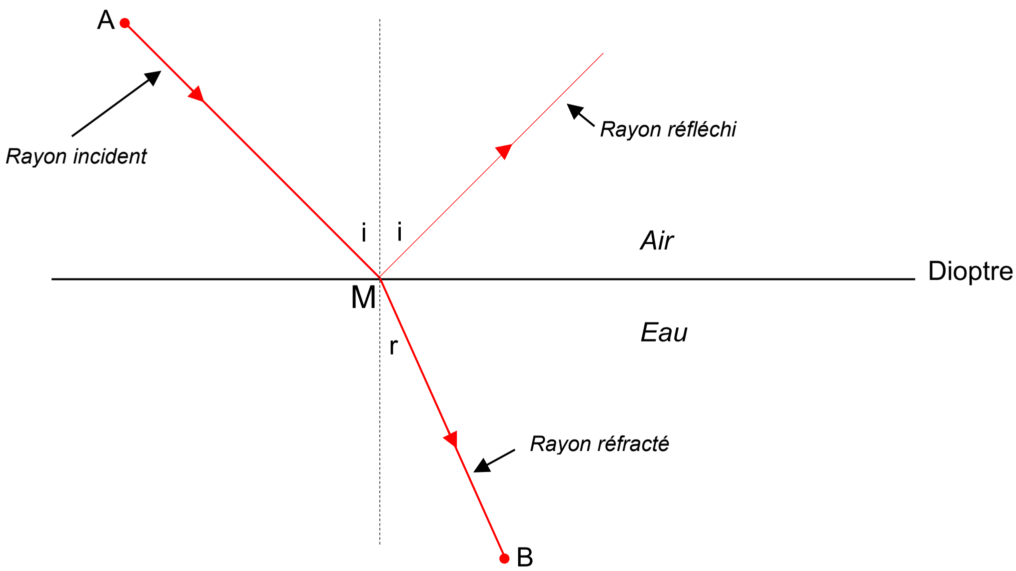
Considérons un miroir plan



Pour aller de A à B en passant par le miroir (M), le chemin qui prend le moins de temps est le chemin rouge tel que les angles i et r sont égaux. Les droites AM et MB sont situées dans un même plan.
Le chemin bleu prendra plus de temps et ne sera donc pas utilisé.

Réfraction

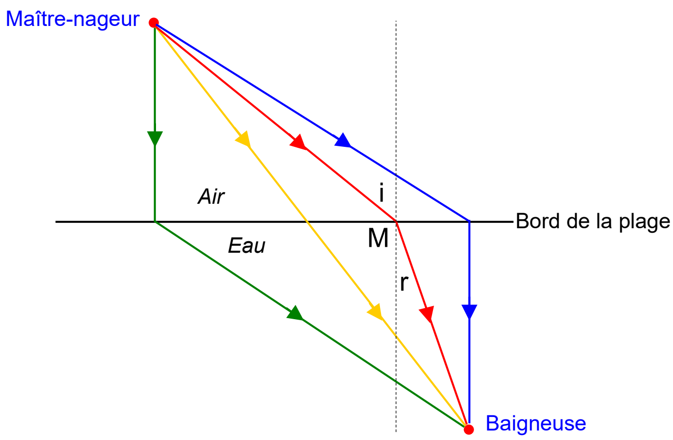
La réfraction est le phénomène qui se produit lorsqu'un rayon lumineux passe d'un milieu à un autre.



Considérons le passage d'un rayon lumineux de l'air à l'eau.

Au passage de ce dioptre, le rayon qui fait un angle i avec la normale[2], est dévié et ressort avec un angle r. La vitesse de la lumière est plus faible dans l'eau que dans l'air, ce qui engendre le phénomène.
Pour aller de A à B, la lumière doit emprunter le chemin le plus rapide (et non le plus court), et donc passer par M.

Pour bien le comprendre ce qui se passe, imaginons un maître-nageur sur une plage, et une belle baigneuse dans l'eau, en train de se noyer.
Le bord de la plage (passage de la plage à l'eau) est le dioptre. Evidemment, le maître-nageur court plus vite qu'il ne nage, de même que la lumière va plus vite dans l'air que dans l'eau, ou le verre.
La question qui se pose est de savoir quel chemin le maître-nageur va emprunter pour sauver la belle, sachant que ce chemin doit être le plus rapide.



Plusieurs solutions s'offre au sauveteur :

- Courir sur la plage jusqu'à être en face de la baigneuse et nager droit devant. Il minimise ainsi la distance parcourue dans l'eau, là où il va le moins vite. C'est le chemin bleu.

- Courir droit devant pour être le plus rapidement dans l'eau. C'est le chemin vert.

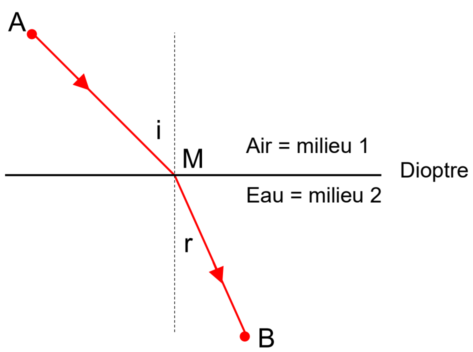
- Aller droit vers la baigneuse, par le chemin jaune.

En fait, le chemin le plus rapide sera le rouge, qui optimise le temps de parcours. Le point M sera tel que les angles i et r répondent à la relation :

$$\boxed{n = \frac{\sin(i)}{\sin(r)}} \qquad \text{relation1}$$

Où n est le rapport des vitesses dans l'air et dans l'eau.

Laissons notre sauveur s'occuper de sa baigneuse, et revenons à notre dioptre :



Dans ce cas, n est le rapport des vitesses de la lumière dans les milieux 1 et 2. Si le milieu 1 est l'air, la vitesse de la lumière dans ce milieu est très proche de celle dans le vide. On aura :

[2] *Une « normale » est une perpendiculaire au dioptre*

$$n = \frac{c}{v}$$ où c est la vitesse de la lumière dans l'air (dans le vide)

v est la vitesse de la lumière dans l'eau (milieu 2)

n est appelé « indice de réfraction » dans le milieu 2.

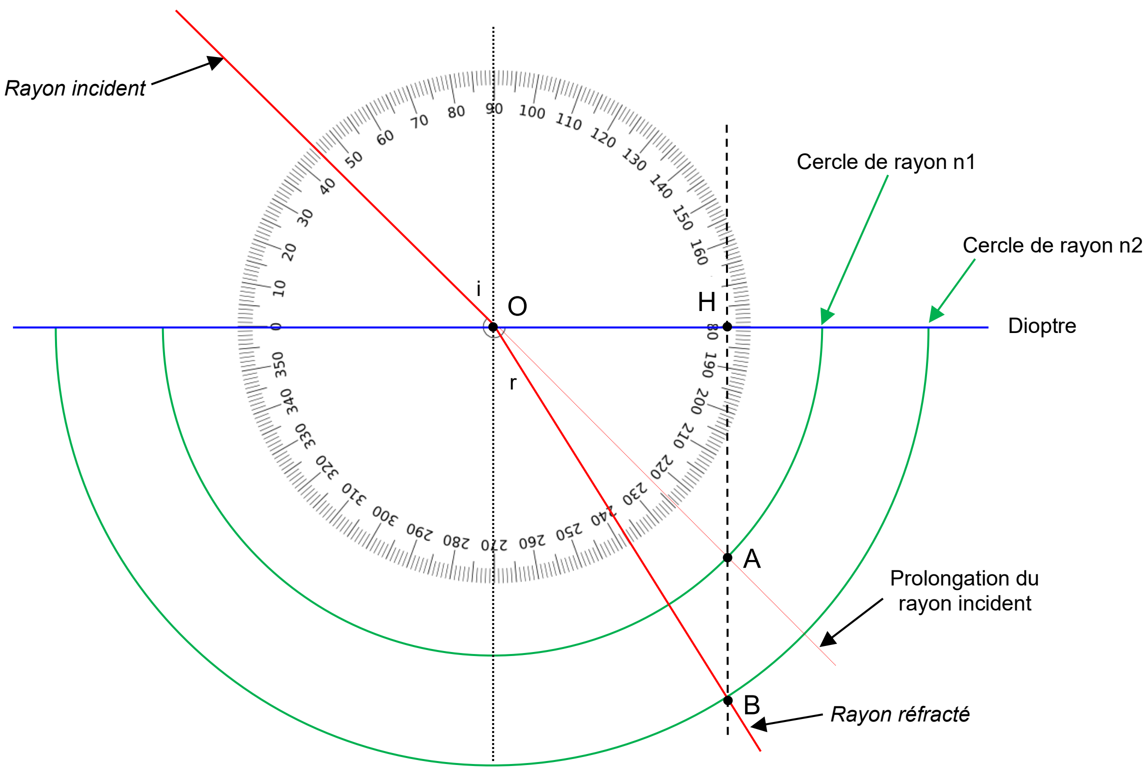
Si la lumière passe d'un milieu 1 à un milieu 2 (par exemple de l'eau au verre), différent de l'air (du vide), la relation 1 se généralise ainsi :

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r$$ avec n_1 l'indice du milieu 1

n_2 l'indice du milieu 2

Dans le cas où le milieu 1 est l'air, son indice de réfraction est égal à 1, et on retrouve bien la relation 1.

Construction géométrique du rayon réfracté selon Descartes

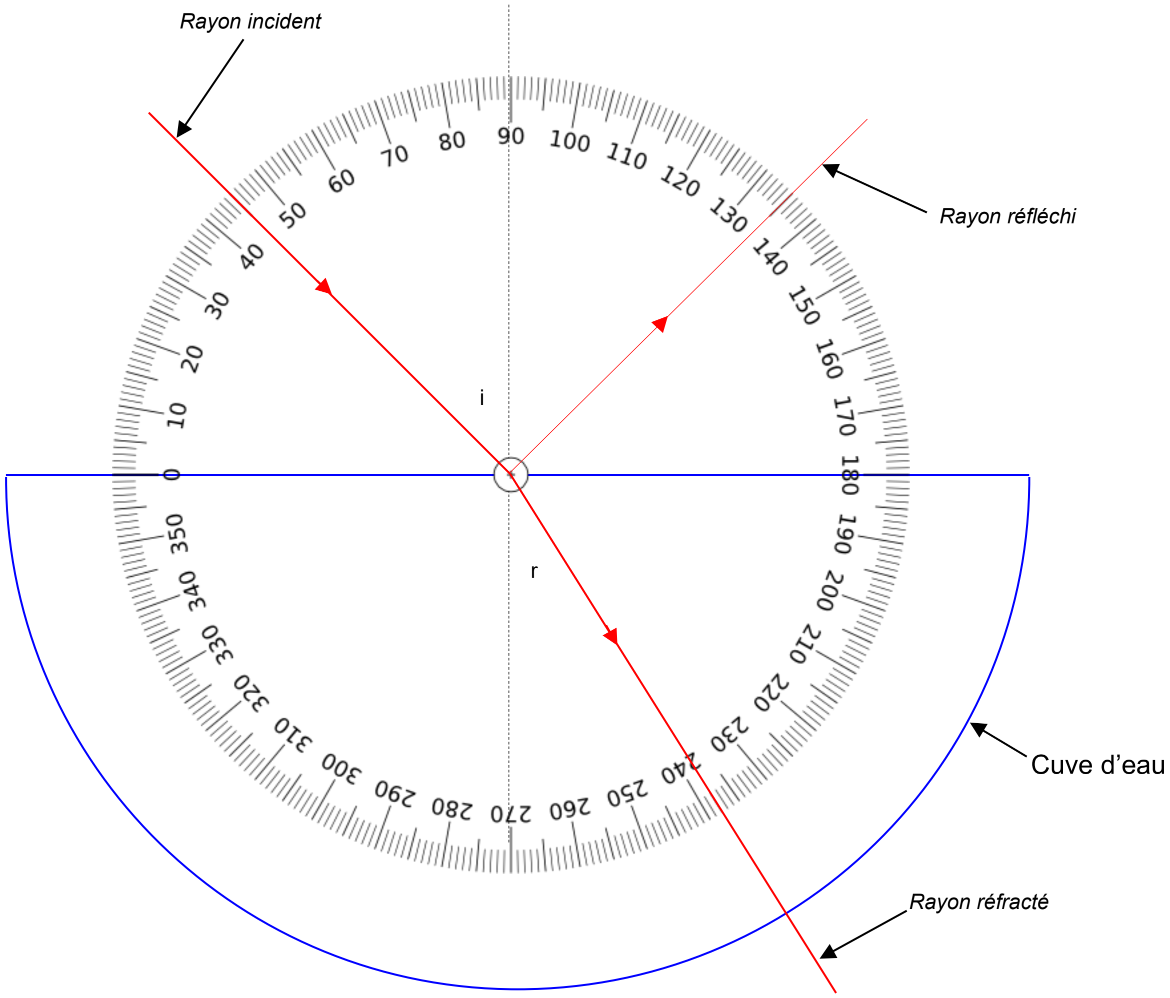


A partir du point O, passage du rayon incident du milieu 1 au milieu 2, on trace deux cercles de rayon respectivement proportionnels à n1 et n2.
Le rayon incident est prolongé et coupe le cercle n1 en A. AH est construit perpendiculairement au dioptre, et coupe le cercle n2 en B.
OB représente le rayon réfracté.

L'expression trigonométrique des angles OAH et OBH en fonction de la longueur OH permet de retrouver simplement la relation 1.

Travaux pratiques

On se propose ici de mesurer l'indice de réfraction de plusieurs milieux, comme l'eau ou l'huile de tournesol (ou tout autre liquide).
Nous aurons besoin d'une cuve hémisphérique pour contenir le produit dont on mesure l'indice, d'une source de lumière donnant un faisceau parallèle, et d'un rapporteur d'angle pour mesurer i et r.



Dans ce cas de figure, i = 45°, r = 32°, et le calcul donne n = 1,33.

L'exercice consiste à faire varier l'angle incident i, à mesurer l'angle réfracté r, et de calculer l'indice de réfraction de l'eau qui doit être constant.

Procéder de même pour l'huile ou tout autre liquide.

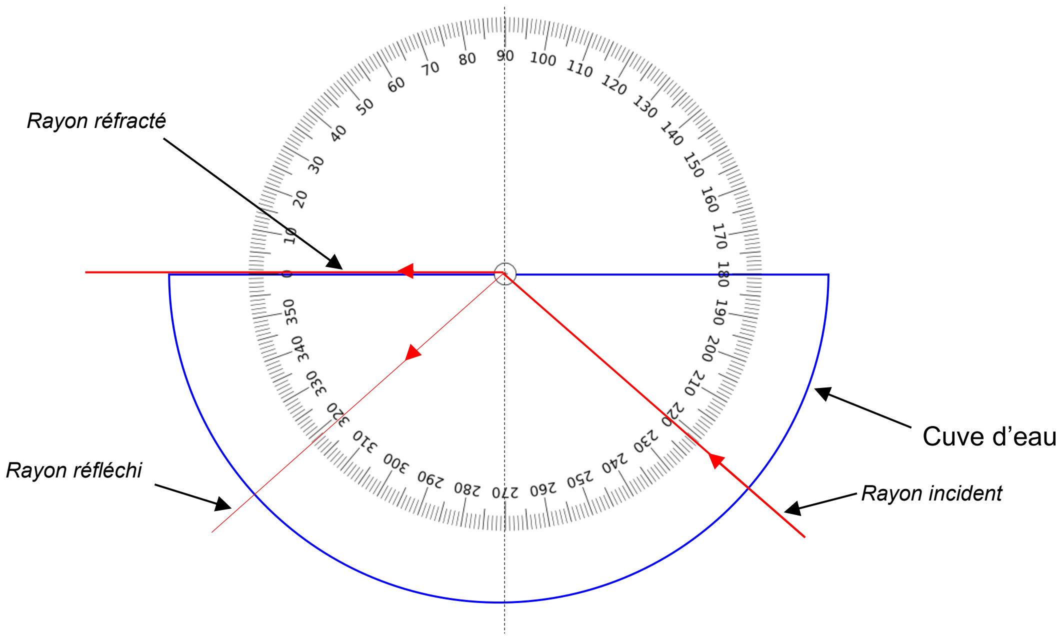
Réflexion totale

En augmentant l'angle d'incidence, on augmente de plus en plus l'angle réfracté. En limite, i = 90°, et l'angle limite de réfraction se calcule avec :

$$\sin r = \frac{\sin i}{n} = \frac{\sin 90°}{1{,}33} = \frac{1}{1{,}33} = 0{,}752$$

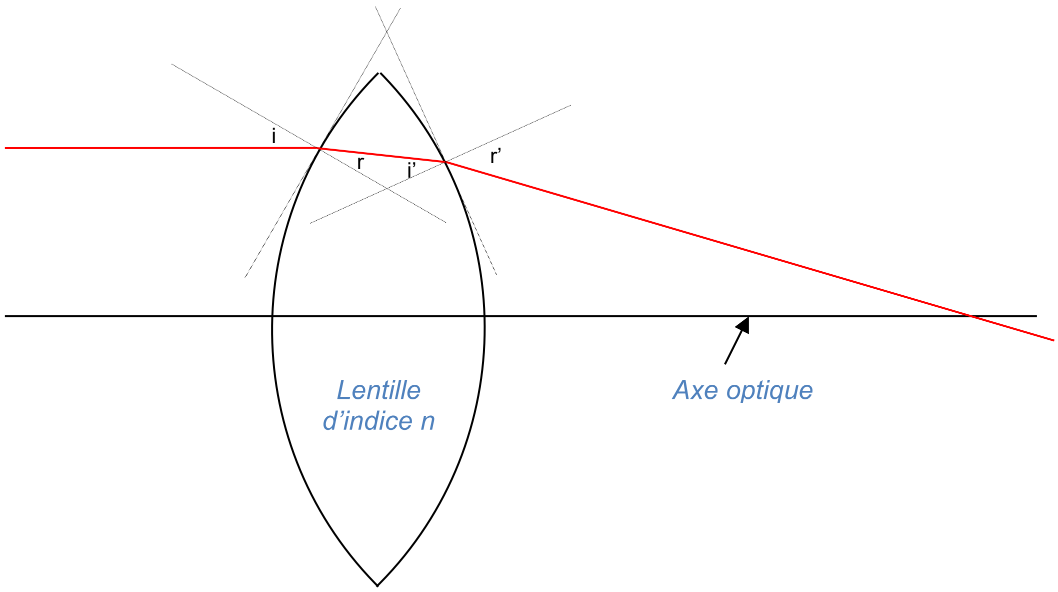
D'où l'on tire r = 48,8° dans le cas de l'eau.
De même, pour le verre, n = 1,5. L'angle limite sera de 41,8°.

D'après le principe du retour inverse de la lumière, le passage du rayon de l'eau à l'air ne pourra se faire que si l'angle d'incidence, cette fois, est inférieur à 48,8°. S'il est supérieur, il y aura réflexion totale, et aucun rayon ne sortira du dioptre eau/air.



Mesurer l'angle de réflexion totale permet aussi de mesurer les indices de réfraction. C'est la méthode utilisée dans les réfractomètres.

Que se passe-t-il dans une lentille ?



Le rayon lumineux arrivant sur la lentille avec un angle i par rapport à la normale de la tangente en ce point, poursuit son chemin dans le verre d'indice n, et est réfracté une seconde fois en sortant du verre avec un angle r', encore par rapport à la normale de la tangente au point de sortie.

Tout se passe comme si le rayon subissait une déviation unique, en coupant l'axe optique de la lentille à son point focal (étant entendu que le rayon incident est parallèle à cet axe optique).